新高中數學課程學與教策略：
統計的新重點

統計的學與教—「進階概率」

吳銳堅

2006年4月

1. 起點

1. 起點

- 概率的概念、定義、賦值及運算(calculus)

  (A.N. Kolmogorov 柯爾莫戈洛夫，1903-1987)

- 可從**期望(expectation)**入手(Whittle, 1992; Pollard, 2002)

1. 起點

新高中課程：

- 必修部分(15)－續概率
- 單元一(4)－進階概率

2.必修部分中概率的運算

2. 必修部分中概率的運算

- 加法定律

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- 互斥(互不相容)事件 **(mutually exclusive events)**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

- 互補事件**(complementary events)**

2. 必修部分中概率的運算

互斥事件與互補事件的關係

- 互補必互斥？
- 互斥必互補？
- 不可同時出現的事件是…?
- 不可同時不出現的事件是…?

2. 必修部分中概率的運算

- (相互)獨立事件(independent events)及乘法定律

空集？

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

- $P(A|B)=P(A)$ 及 $P(B|A)=P(B)$

- 如何判斷兩個事件是否相互獨立？

「甲患感冒」與「乙患感冒」

思考題 1

同時投擲三枚均勻硬幣，設事件A為「所有硬幣出現相同面」，事件B為「至多出現一個正面」。A、B是否相互獨立？

思考題 2

同時投擲四枚均勻硬幣，設事件C為「所有硬幣出現相同面」，事件D為「至多出現一個正面」。C、D是否相互獨立？

探索與研究：*n* 固定，*p* 可變…

Stenger, 1980 Abstracts AMS ;

思考題 1

同時投擲三枚均勻硬幣，設事件A為「所有硬幣出現相同面」，事件B為「至多出現一個正面」。A、B是否相互獨立？

思考題 2

同時投擲四枚均勻硬幣，設事件C為「所有硬幣出現相同面」，事件D為「至多出現一個正面」。C、D是否相互獨立？

探索與研究：*n* 固定，*p* 可變…

Stenger, 1980 Abstracts AMS ;

互斥事件與相互獨立事件

- 如果 A 與 B 相互獨立，則A 與 B 互斥？
- A 與 B 相互獨立

⇨ A 與 B 毫無關係

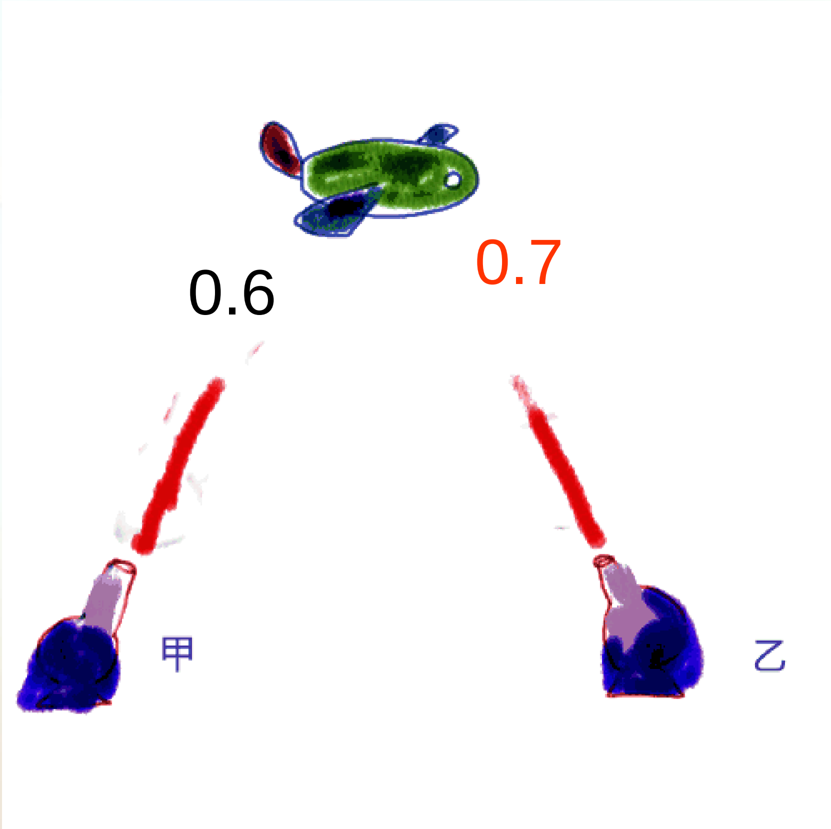
⇨ A、B 不會同時出現

⇨ $A \cap B = \emptyset$

⇨ A 與 B 互斥

反例？

討論例子



求飛機被擊中的概率？

- 如果 A 與 B 互斥，則 A 與 B 相互獨立？
- 如果 A 與 B 互斥，則 A 與 B 不相互獨立？
- 如果 A 與 B 相互獨立，則 A 與 B 不互斥？
- 如果 A 與 B 互斥且 $P(A)P(B) \neq 0$，則 A 與 B 不相互獨立？
- 如果 A 與 B相互獨立且 $P(A)P(B) \neq 0$，則 A 與 B 不互斥？

2. 必修部分中概率的運算

認識條件概率的記法

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

(必修部分：不包括貝葉斯定理)

2. 必修部分中概率的運算

例子：

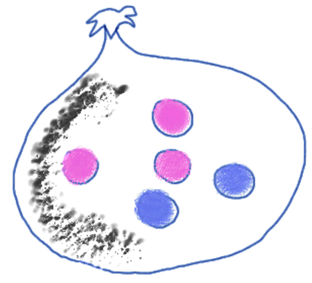
$P(1\text{紅 及 }2\text{紅}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

$P(1\text{紅}) = ?$

$P(2\text{紅}) = ?$

$\boxed{P(1\text{紅})}$

$\boxed{P(2\text{紅} \mid 1\text{紅})}$



2. 必修部分中概率的運算

例子：高爾頓悖論 (Galton's paradox)

(1894) (Stirzaker, 2003, p.63)

投擲三枚公允的硬幣，必定最少有兩枚是同面。第三枚與這兩枚同面的概率為1/2，因此，三枚同面的概率為 1/2！

HHH

HHT

HTH

THH

P(3rd = H |最少2H) = 1/4

P(3rd = T |最少2H) = 3/4

P(3rd = T |最少2T) = 1/4

P(3rd = H |最少2T) = 3/4

2. 必修部分中概率的運算

例子：貝特朗箱子悖論 (Bertrand’s box paradox)(1889) (Stirzaker, 2003, p.63)

三個箱子：WW、BW 、BB

隨機選擇一個箱子，並隨機抽出一個籌碼。它是黑是白的概率都是1/2。另外一個是黑是白的概率也都是1/2。因此，抽中箱子內兩個籌碼同色的概率是1/2!

$$P(\mathrm{BB} \mid \mathrm{B}) = 2/3 = P(\mathrm{WW} \mid \mathrm{W})$$

3.單元一中概率的運算

3. 單元一中概率的運算

學習單位4 — 進階概率

- 認識條件概率及獨立事件
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
- $P(A \mid B) = P(A)$ 其中A、B為獨立事件
- 使用貝葉斯定理解決簡單問題

3. 單元一中概率的運算

- 從貝葉斯定理到趣味數學

  例如：基數謬誤(Base-rate fallacy)、蒙地豪謎題(Monty Hall Problem)、假設檢定(Hypothesis Testing)的邏輯謬誤

3. 單元一中概率的運算

基數謬誤(base-rate fallacy)

e.g. 測試劑$\boxed{\text{準確度達90\%}}$

某人呈陽性反應，$\boxed{\text{他患病的概率}}$是???

$$P(+ve|D) = P(-ve|{\sim}D)=0.9$$

$$P(D|+ve)$$

3. 單元一中概率的運算

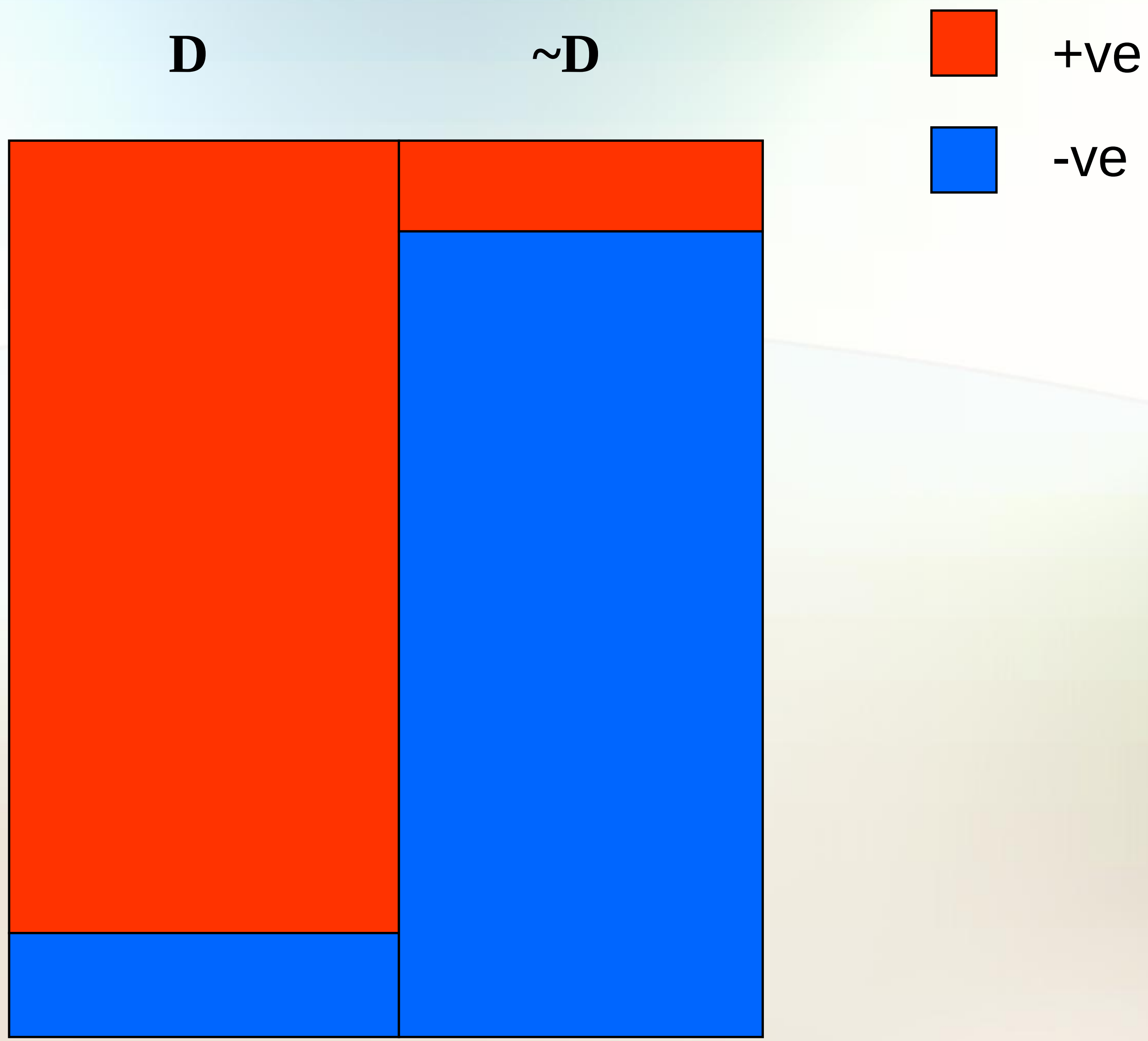
$$P(\mathrm{D}\,|\,+\mathrm{ve}) = \frac{P(+\mathrm{ve}\,|\,\mathrm{D})P(\mathrm{D})}{P(+\mathrm{ve}\,|\,\mathrm{D})P(\mathrm{D}) + P(+\mathrm{ve}\,|\sim \mathrm{D})P(\sim \mathrm{D})}$$

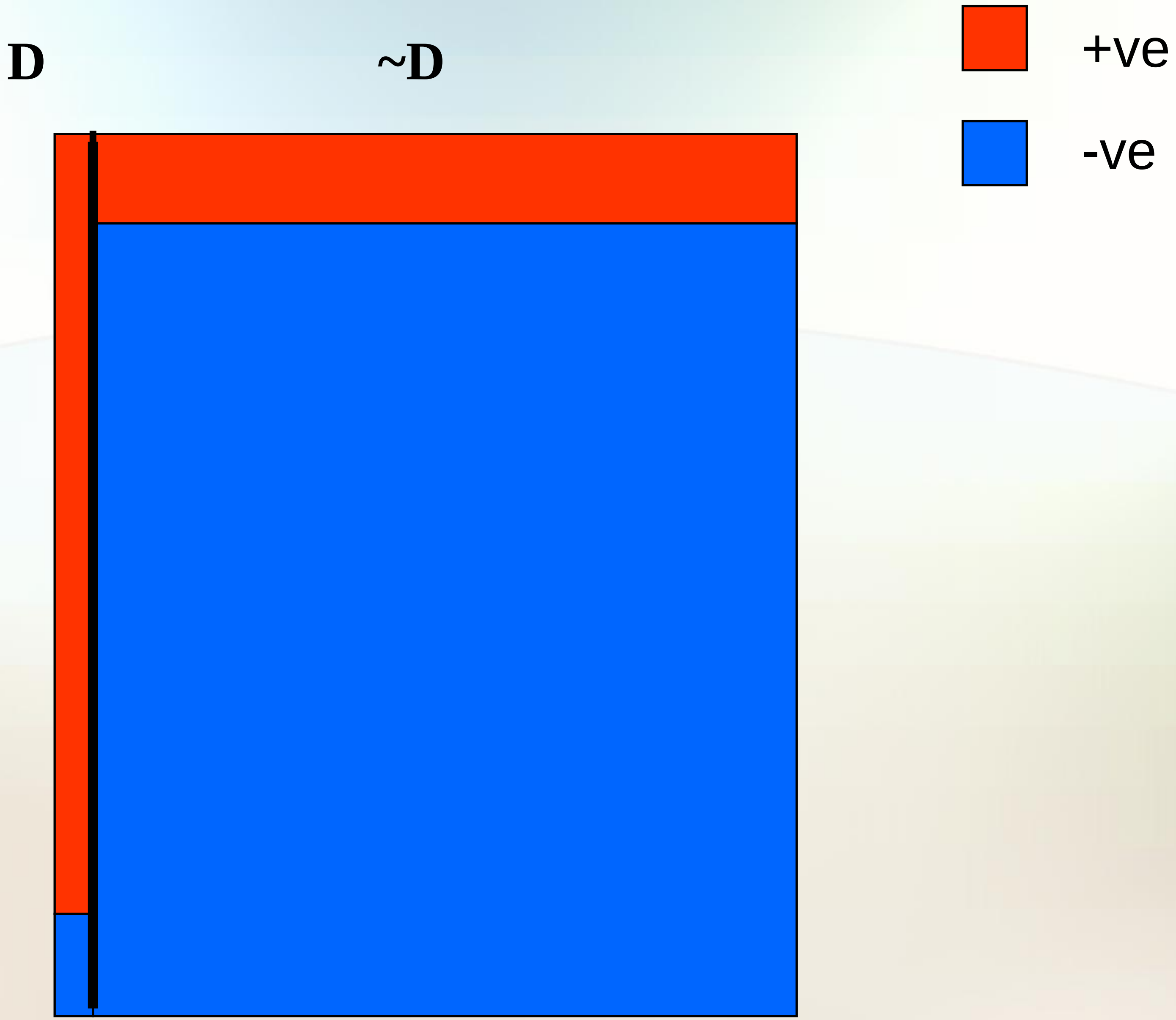
$$= \frac{0.9P(\mathrm{D})}{0.9P(\mathrm{D}) + 0.1P(\sim \mathrm{D})}$$

0.001

0.999

= 0.009 !


D
~D
+ve
-ve


D
~D
+ve
-ve

4.概率的概念

4. 概率的概念

- 古典理論(Classical theory)

如果有 m 個不同的元素可以令 A 事件發生和 n 個不同元素可以令 A 事件不發生，而每個元素有相同的機會發生，在這情況下，A 事件發生的概率為

困難？

$$P(A) = \frac{m}{m+n}$$

4. 概率的概念

古典理論的困境

- 循環定義
- 有理數的限制
- 元素不一定有相同的機會發生(灌鉛的骰子)
- 無差異原則

4. 概率的概念

無差異原則應用到連續隨機變量時所導致的悖論

例如：已知某物質的比容(積)(specific volume)隨機平均分佈於 [1 , 3] 間。

$$\boxed{P(1 \leq \text{比容} \leq 2)} = P(2 \leq \text{比容} \leq 3) = 1/2$$

該物質的密度隨機平均分佈於 [1/3 , 1] 間。

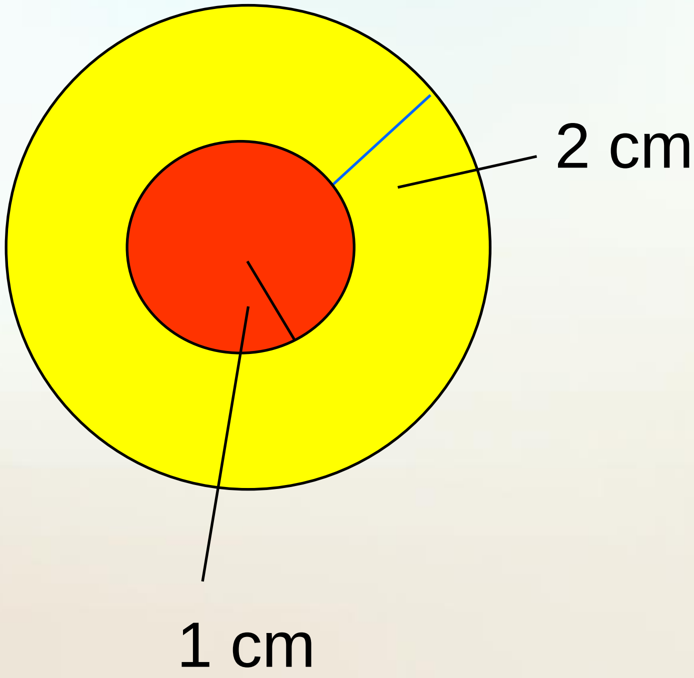
$$P(1/3 \leq \text{密度} \leq 2/3) = P(2/3 \leq \text{密度} \leq 1) = 1/2$$

$$P(3/2 \leq \text{比容} \leq 3) = \boxed{P(1 \leq \text{比容} \leq 3/2)} = 1/2$$

4. 概率的概念

$$\frac{1}{4}?$$

例子：



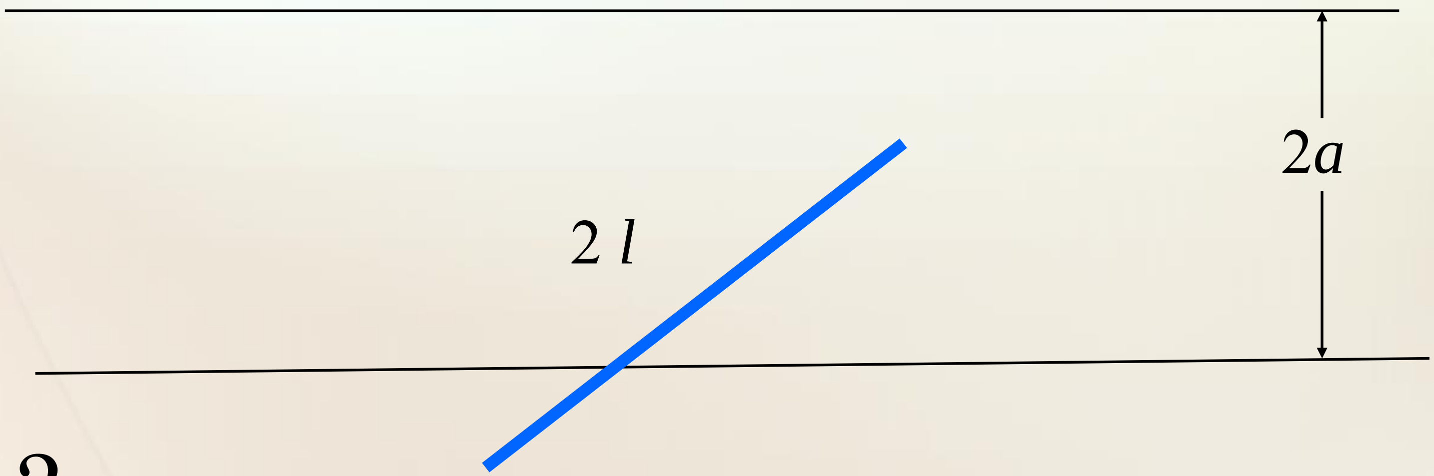
$$\frac{1}{2}?$$

4. 概率的概念

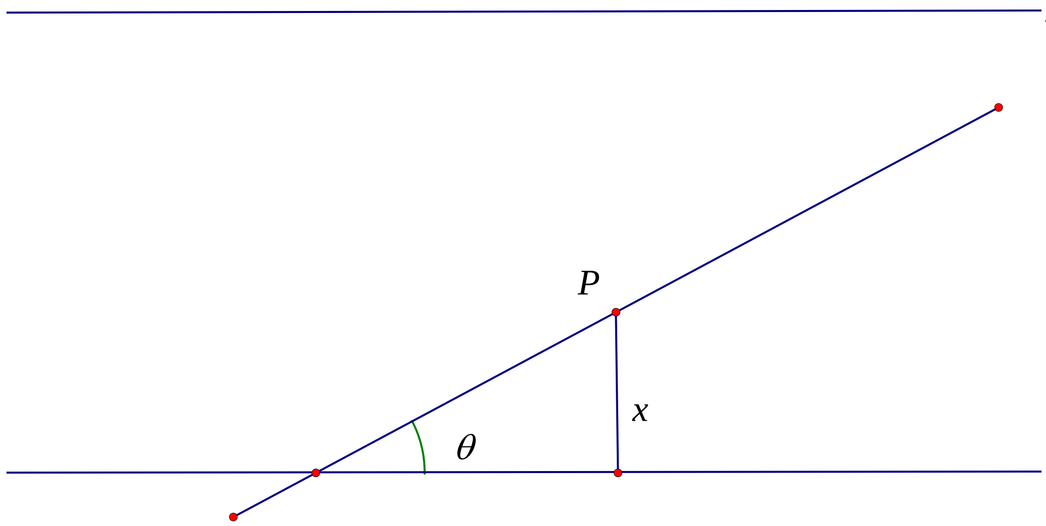
$$\frac{2l}{\pi a}?$$

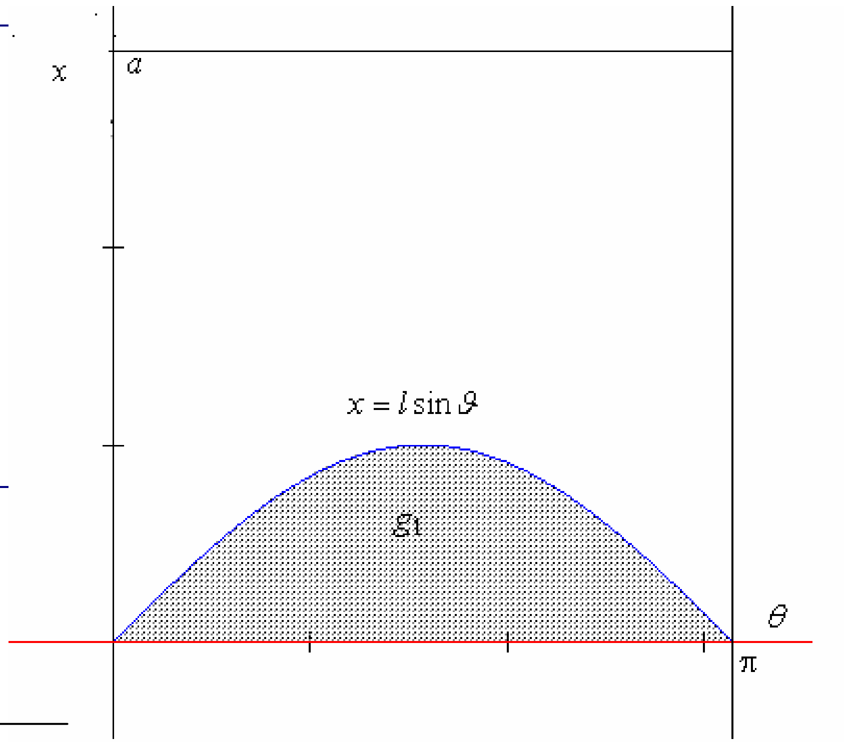
例子:蒲豐投針問題 (Buffon’s needle problem)

$$\frac{l}{2a}?$$



$$\frac{\pi l}{4a}?$$

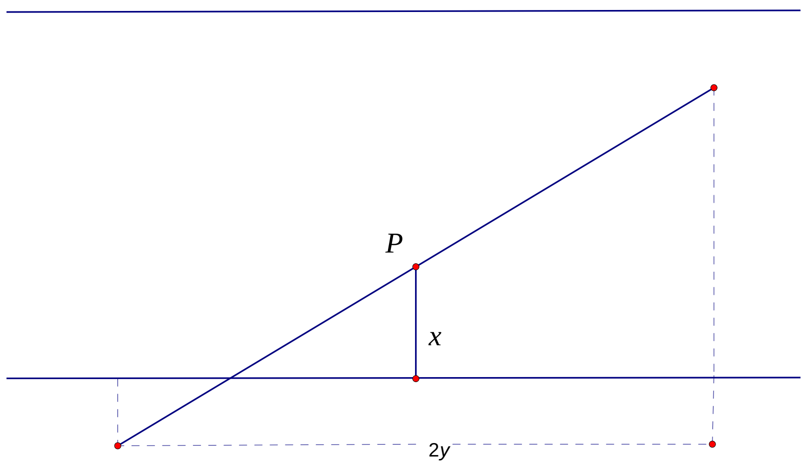


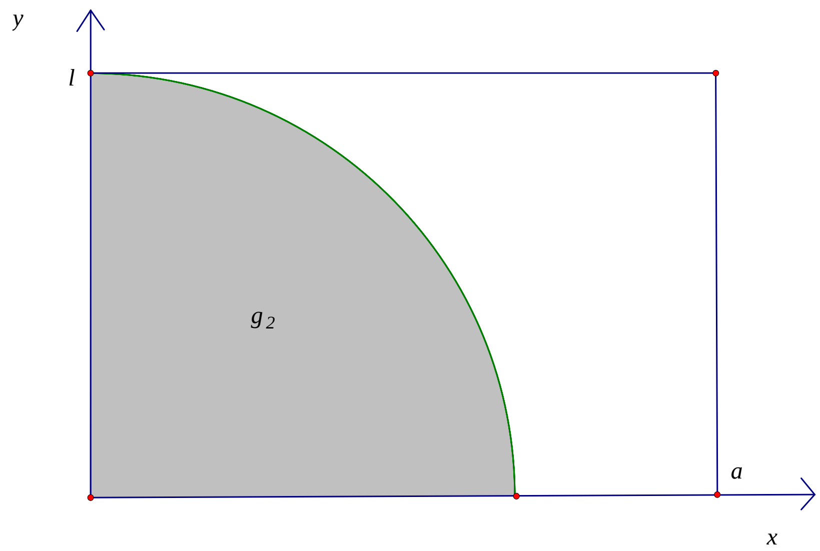


$$\frac{\text{Area of } g_1}{\text{Area of the rectangle bounded by } 0 \le x \le a \text{ and } 0 \le \theta \le \pi}$$

$$= \frac{\int_0^\pi l \sin\theta \, d\theta}{a\pi}$$

$$= \frac{2l}{\pi a}$$

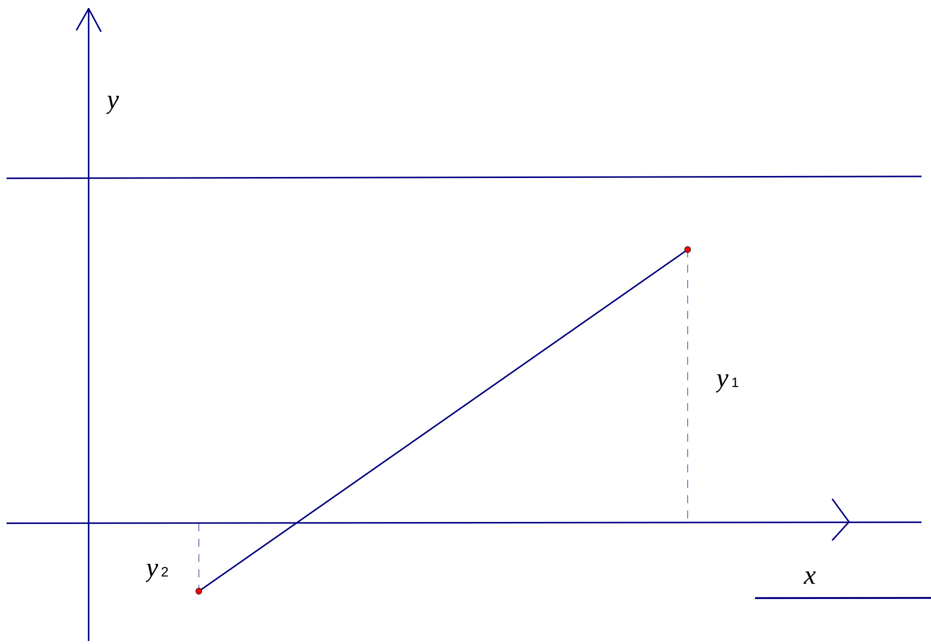


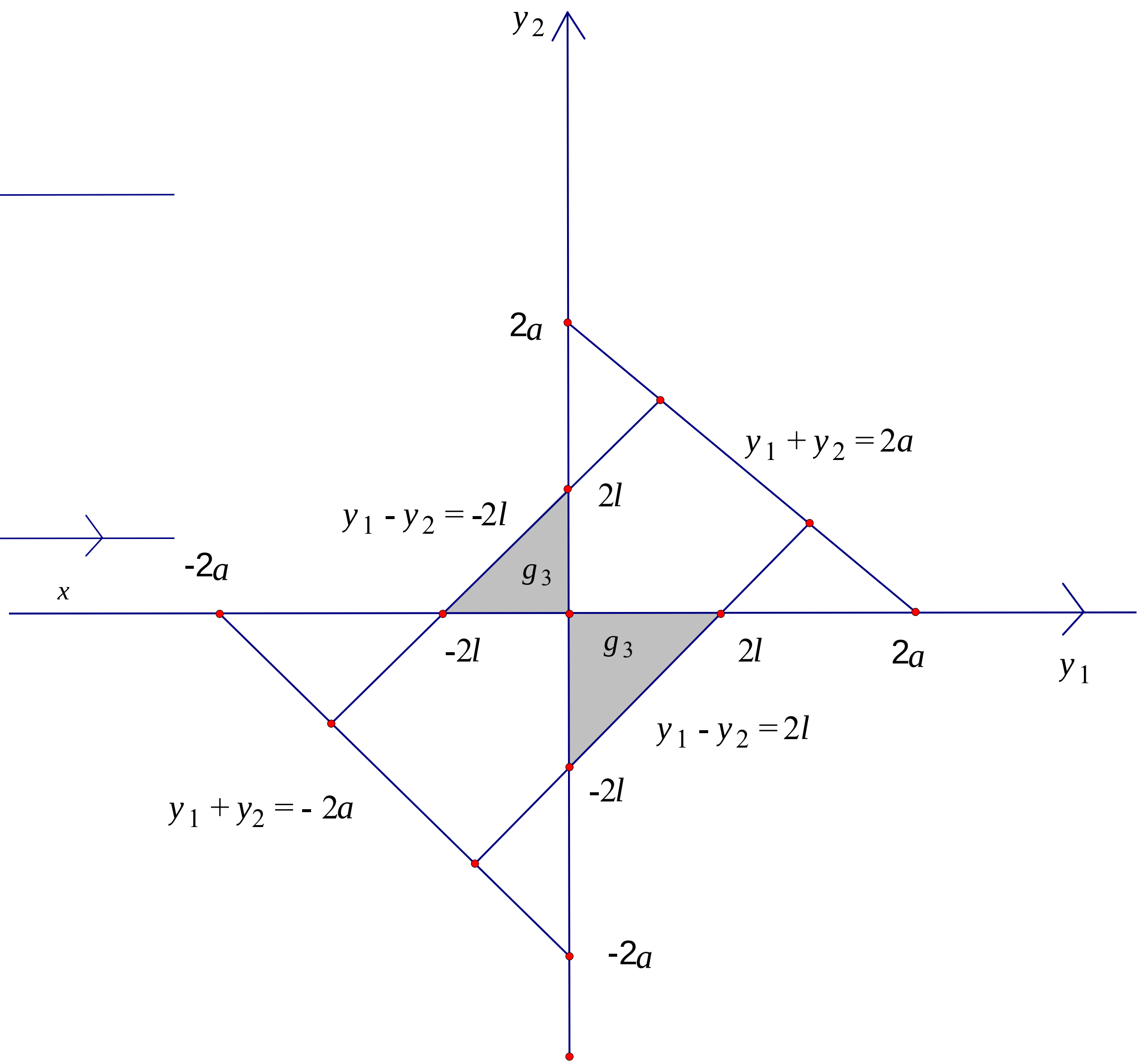


$$\frac{\text{The area of the shaded region } g_2}{\text{The area of the rectangle bounded by } 0 \le x \le a \text{ and } 0 \le y \le l}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\pi l^2}{l a}$$

$$= \frac{\pi l}{4 a}$$





$$\frac{\text{The area of the shaded region } g_3}{\text{The area of the rectangle bounded by } |y_1 - y_2| = 2l \text{ and } |y_1 + y_2| = 2a}$$

$$= \frac{4l^2}{2\sqrt{2}a \times 2\sqrt{2}l} = \frac{l}{2a}$$

4. 概率的概念

(相對)頻率理論((Relative) Frequency theory)

- 理論困境
- 投球問題

長遠來說，A 勝出的次數≈B勝出的次數

P(A 勝）＝P（B 勝）＝1/2

若A 投兩球，B 投一球，最遠者勝。求 B 勝出的概率。

4. 概率的概念

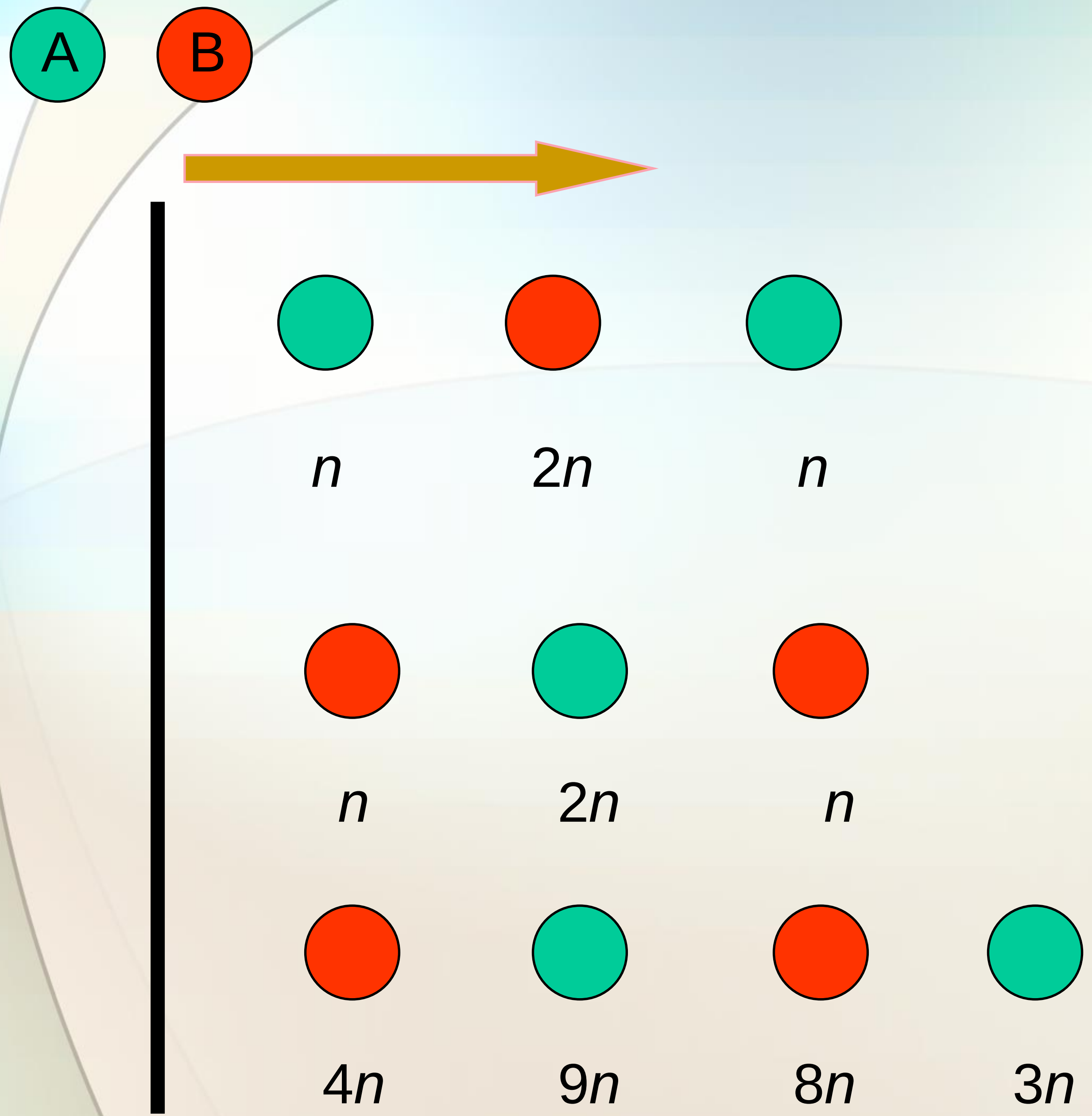
若A 投兩球，B 投一球，最遠者勝。 B 勝出的概率是：

(A) 1/2

(B) 1/4

(C) 其他

(D)不知道



P (B 勝)

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}$$

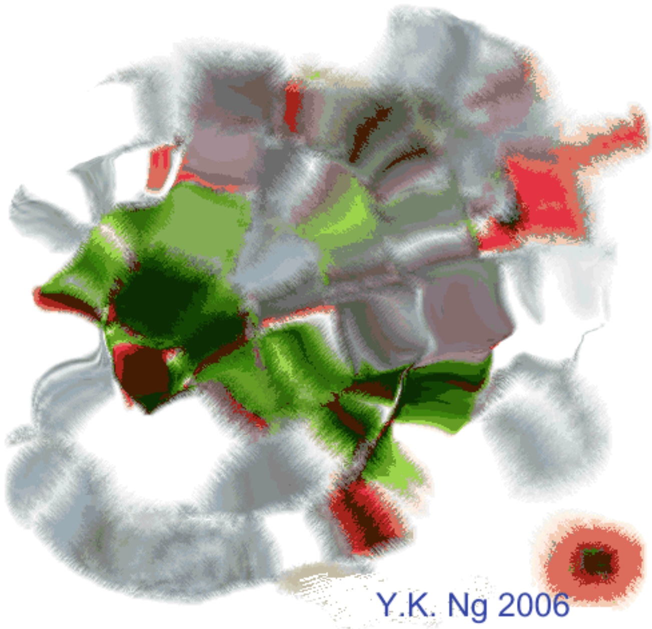
4. 概率的概念

其他理論

- 邏輯理論(Logical theory)
- 主觀(貝葉斯)理論(Subjective theory)
- 趨向理論(Propensity theory)

(Galavotti, 2005; Hacking, 2001; Mellor, 2005)

- 引入概率分佈 (r.v., pmf, pdf,⋯)



完

參考書目

Galavotti, M.C. (2005). *Philosophical introduction to probability*. Stanford, Ca: CSLI.

Hacking, I. (2001). *Introduction to probability and inductive logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kolmogorov, A.N. (1956). *Foundations of the theory of probability (2nd English ed.)*. Prvidence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing.

Mellor, D.H. (2005). *Probability: A philosophical introduction*. London & New York: Routledge.

Pollard, D. (2002). *A user's guide to measure theoretic probability*. Cambridge: Cambridge University Press.

Stirzaker, D. (2003). *Elementary probability (2nd ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press.

Whittle, P. (1992). *Probability via expectation (3rd ed.)*. New York: Springer.

所有硬幣出現相同面

H……H $\quad \frac{1}{2^n}$

T……T $\quad \frac{1}{2^n}$

至多出現一個正面

HT……T $-$ ${}_nC_1$

T……T

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \frac{n+1}{2^n}$$

$$\frac{n+1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}$$

$$2^{n-1}=n+1$$

$$f(x)=2^{x-1}-x-1$$

$$x\geq 2,\quad f'(x)=2^{x-1}\ln 2-1>0$$

$$f(2)<0\quad f(4)>0$$

….

⇧