學習單位	學習重點	時間
基礎知識領域		
5. e 的簡介	5.1 認識 e 和自然對數的定義及其記法	1.5

課程闡釋：

必修部分的學習單位 3 和 5，為非基礎課題，其中已討論指數函數、對數函數和它們的圖像。數字 e 及自然對數是十分重要的數學概念。它們在微積分的學習中有重要的意義。學生會在本學習單位中學習指數函數 e^x。

一般引入 e 的方法有下列兩種：

(1) $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

(2) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

單元二(代數與微積分)會以第一個方法引入數值 e。

介紹 e 的時候，可以使用以下以複利息計算本利和為例子。

若將一筆款項存於銀行一年，年利率為 1%。以複利息計算，按以下情況求本利和：

(i) 每一季為一期；

(ii) 每一個月為一期；

(iii) 每一日為一期；

(iv) 每一小時為一期；

(v) 每一秒為一期。

由此，引出求極限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的討論。

證明這一個極限值的存在須應用單調收斂定理[4]。然而，這個定理並不包括在本課程的範圍內。因此，學生並不須證明有關極限的存在問題。

作為延伸，可進一步向學生介紹 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ 的證明。

單元一(微積分與統計)則以第二個方法導入，其中涉及展開二項式的 n 次冪 $(1+\frac{x}{n})^n$ 。

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{x}{n})^n &= \sum_{r=0}^{n} C_r^n (\frac{x}{n})^r \\
&= C_0^n(\frac{x}{n})^0 + C_1^n(\frac{x}{n})^1 + C_2^n(\frac{x}{n})^2 + C_3^n(\frac{x}{n})^3 + \ldots + C_r^n(\frac{x}{n})^r + \ldots + C_n^n(\frac{x}{n})^n \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\frac{x^r}{n^r} + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{x^n}{n^n} \\
&= 1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{x^r}{r!} + \ldots \\
&\quad + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1 + x + (1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{x^r}{r!} + \right. \\
&\qquad \left. \ldots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{x^n}{n!}\right] \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots
\end{aligned}
$$

代入 $x = 1$，可得

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots$$

[4]單調收斂定理指出每一個單調上升並有上界的序列必定收斂及每一個單調下降並有下界的序列也必定收斂。

利用計算機，可以得到 e 與 2.71828 近似。

教師可提醒學生，自然對數函數擁有常用對數函數的所有性質，所以不須把自然對數函數作為函數的一個新類別來處理。因為在以後的學習單位中，換底公式尤其是在求不同底的對數函數的導數時十分重要，所以應該重溫必修部分學習重點 3.3 有關換底公式的內容。

這一個學習單位亦可安排在教授學習重點 6.1 之前。